| | | |
|---|---|---|
| **LPM** <br> **2010/2011** | **SERIE D'EXERCICES** | **Prof:** <br> **MOHAMED BENZINA** |
| | **MATHEMATIQUE** | **Classe 3T** |

## EXERCICE N° 1 :

On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, le plan est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ Calculer $j^2$ et en déduire que : $1+j+j^2=0$ , $j^3=1$ et $\frac{1}{j}=j^2=\bar{j}$

2/ On considère les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$

a/ Placer les points *A*, *B* et *C* dans le plan.

b/ Calculer $|j|$ et $|j^2|$ et déduire que $A$, *B* et *C* sont sur un même cercle qu'on déterminera

c/ Montrer que $ABC$ est équilatéral.

3/ Déterminer puis tracer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$, dans chacun des cas suivants,

Vérifiant :

a/ $|z-j|=3$

b/ $|z-1|=|z-j^2|$

4/ a/ Donner la forme algébrique de $u=\frac{1-j}{1+j}$

b/ Donner la forme trigonométrique de $v=1+i\sqrt{3}$

c/ Donner la forme polaire de $w=1-i\sqrt{3}$

## EXERCICE N° 2 :

Soit f la fonction définie sur IR\{1} par : $f(x)=\frac{2x^2-3x+2}{x-1}$ et $(\zeta_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ; interpréter graphiquement les résultats obtenus

2/ Soit la droite D : y = 2x – 1

a) Montrer que D est une asymptote à $(\zeta_f)$ au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position de $(\zeta_f)$ par rapport à D pour x >1

3/a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f '(x)

b) Dresser le tableau de variation de f

4) Tracer la droite D et la courbe $(\zeta_f)$.

## EXERCICE N°3 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$ et soit $C_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(o,\vec{i},\vec{j})$

1/ Montrer que f est dérivable sur IR et calculer $f'(x)$

2/ Dresser le tableau de variation de f

3/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ; interpréter graphiquement ces résultats.

4/ Construire $(C_f)$

5/ a) Construire dans le même repère $C_{|f|}$

b) Donner le nombre des solutions dans IR de l'équation $|f(x)| = 1$

## EXERCICE N°4 :

Soit $f$ une fonction définie sur $]1\,;+\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variations.

| $x$ | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{5}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

De plus on admet que, pour tout $x$ élément de $]1;+\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + \dfrac{b}{x-c}$ , où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels (avec $a$ et $b$ non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir d'indications fournies par le tableau de variations de $f$.

On appelle $C$ la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

**1.** Quel est le nombre de solutions dans $]1;+\infty[$ de l'équation $f(x) = 3$ ? Expliquer.

**2.** **a)** Utiliser le tableau de variations pour justifier l'existence d'une droite ***D*** asymptote à $C$ . Donner une équation de ***D***.

**b)** En déduire la valeur de $c$.

**3.** A partir de cette question, on suppose que $c = 1$.

**a)** Calculer $f'(x)$ en fonction de $a$ et de $b$.

**b)** A l'aide du tableau, trouver deux relations entre $a$ et $b$. Calculer alors $a$ et $b$.

**4.** A partir de cette question, on suppose que : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{2(x-1)}$

Montrer que la droite ***D'*** d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $C$ .

**5.** Résoudre dans $]1;+\infty[$ l'équation $f(x) = 3$.

**6.** **a)** Calculer $f'(x)$.

**b)** Déterminer une équation de la droite T, tangente à $C$ au point d'abscisse 2.

**7.** Tracer $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D'}$ et $C$ .

**EXERCICE N° 5 :**

On considère les nombres complexes suivants $Z_1=(1-i)(1+2i)$ ,
$Z_2=\frac{2+6i}{3-i}$ et $Z_3=\frac{4i}{i-1}$ Et on désigne par M1, $M_2$ et $M_3$ leurs images dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

1- Ecrire les nombres complexes $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$ sous formes algébriques
2- Placer $M_1$, $M_2$ et $M_3$ dans P
3- Quelle est la nature du triangle $M_1M_2M_3$
4- Déterminer l'affixe $Z_4$ du point $M_4$ pour que $M_1M_2M_3\,M_4$ soit un carrée

**EXERCICE N° 6 :**

*Soit f la fonction définie sur IR \ { 2} par:* $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$

*On désigne par* $\zeta_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ *. Interpréter graphiquement le résultat obtenu*

2) a) *Vérifier que pour tout réel* $x\neq 2$ *; on a* $f(x)=x+\dfrac{1}{x-2}$

b) *En déduire que la droite D : y = x est une asymptote à* $\zeta_f$ *au voisinage de* $\pm\infty$

3) a) *Vérifier que pour tout réel* $x\neq 2$ *; on a* $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

b) *Dresser le tableau de variations de f*

4) a) *Résoudre dans IR l'équation f(x) = 0*

b) *Tracer* $\zeta_f$

5) *Déterminer graphiquement ; suivant les valeurs du réel m ; le nombre de solutions de l'équation f(x) = m*

**EXERCICE N° 7 :**

*Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé* $(o,\vec{u},\vec{v})$*, on considère les points A, B, C d'affixes respectives* $Z_A=-2i$ ; $Z_B=1+i$ ; $Z_C=4+2i$

1) a) *Placer sur une figure les points A, B et C.*

b) *Calculer les affixes des vecteurs* $\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

c) *Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.*

*2) a) Donner la forme trigonométrique de* $Z_A$ ; $Z_B$ *puis* $\frac{Z_A}{Z_B}$

*b) En déduire que* $(Z_B)^{2012}$ *est un réel négatif*

*3) Déterminer les ensembles suivants :*

*a)* $F = \{ M(z) \in P / \ |z + 2i| = 2011 \}$

*b)* $G = \{ M(z) \in P / \ |z + 2i| = |z - 1 - i| \}$